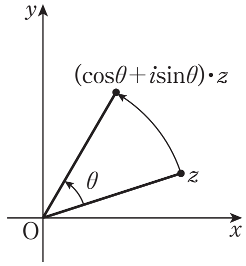
PART2 点を中心とする回転

要点整理と公式

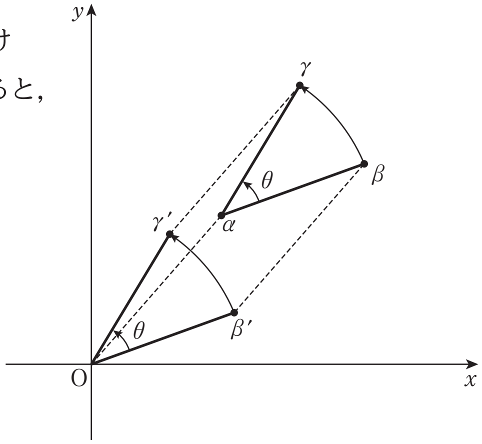
要点① 点 α を中心とする回転



複素数平面上の点 z を，原点を中心に θ だけ回転した点を表す複素数は

$$(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot z$$

である。これを元に，点 β を，点 α を中心に θ だけ回転した点 γ を表す複素数を考える。



点 α を　　　だけ平行移動すると，点 α は原点に移る。点 β と点 γ を，ともに　　　だけ平行移動した点をそれぞれ点 β'，点 γ' とすると，

$$\beta'=\beta\qquad,\ \gamma'=\gamma$$

点 β' を，原点中心に θ だけ回転した点が γ' であるから

$$\gamma'=(\cos\theta+i\sin\theta)\beta'$$

したがって

$$\gamma\qquad=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta\qquad)$$

である。

点 α を中心とする回転

点 β を，点 α を中心に θ だけ回転した点を γ とすると

$$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$$

(ex) $\alpha=1-i$，$\beta=-1+3i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す複素数を γ とすると

$$\gamma\qquad=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\beta\qquad)\text{ より}$$

$$\gamma=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\{(-1+3i)-(1-i)\}+(1-i)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(-2+4i)+(1-i)$$

$$=-\sqrt{2}+2\sqrt{2}i-\sqrt{2}i-2\sqrt{2}+1-i=1-3\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})i$$

[MEMO]

2 (1) $\alpha=1+i$，$\beta=3+5i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\dfrac{5}{6}\pi$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

(2) 複素数平面上の 2 点 A，B を表す複素数をそれぞれ $\alpha=-2+i$，$\beta=4+3i$ とする。三角形 ABC が正三角形となるように点 C を定めるとき，点 C を表す複素数 γ を求めよ。

Point Pickup

点 α を中心とする回転

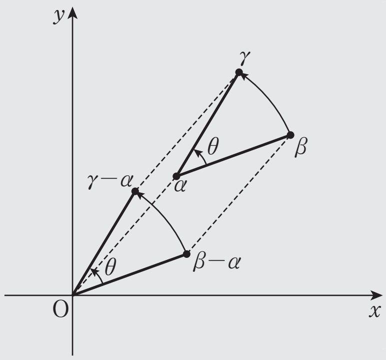
点 β を，点 α を中心に θ だけ回転した点を γ とすると

$$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$$

すなわち

$$\gamma=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)+\alpha$$

である。



第 8 講 PART2 確認問題

1 $\alpha=2+i$，$\beta=4+5i$ とする。

点 β を，点 α を中心として $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求める。

α，β，γ の間に等式 [ア] が成り立つ。

したがって，$\gamma=$ [イ] である。

[ア]，[イ] は，下の①～④のうちから選べ。

[[ア] の選択肢]

① $\gamma=\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)(\beta-\alpha)$

② $\gamma-\alpha=\left(\sin\frac{3}{4}\pi+i\cos\frac{3}{4}\pi\right)(\beta-\alpha)$

③ $\gamma-\alpha=\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)(\beta-\alpha)$

④ $\gamma+\alpha=\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)(\beta+\alpha)$

[[イ] の選択肢]

① $3\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$　② $-3\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$

③ $(2+3\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})i$　④ $(2-3\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})i$

2 複素数平面上の 2 点 A，B を表す複素数をそれぞれ

$\alpha=-1+2i$，$\beta=3+4i$ とする。

三角形 ABC が正三角形となるように点 C を定めるとき，

点 C を表す複素数 γ を求める。

このとき，点 γ は，点 β を，点 α を中心に [ウ] または

$-$[ウ] だけ回転した点である。

したがって，$\gamma=$ [エ] である。

[ウ]，[エ] は，下の①～④のうちから選べ。

[[ウ] の選択肢]

① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{3}$　③ $\dfrac{\pi}{2}$　④ $\dfrac{2}{3}\pi$

[[エ] の選択肢]

① $\pm(2\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i)$

② $2\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i$，$(-2+2\sqrt{3})+(4+\sqrt{3})i$

③ $(2-\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})i$，$(2+\sqrt{3})+(1-2\sqrt{3})i$

④ $(1-\sqrt{3})+(3+2\sqrt{3})i$，$(1+\sqrt{3})+(3-2\sqrt{3})i$

[MEMO]

PART2 点を中心とする回転

2 (1)　$\alpha=1+i$，$\beta=3+5i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\frac{5}{6}\pi$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

(2)　複素数平面上の 2 点 A，B を表す複素数をそれぞれ $\alpha=-2+i$，$\beta=4+3i$ とする。三角形 ABC が正三角形となるように点 C を定めるとき，点 C を表す複素数 γ を求めよ。

[解答]

(1)　$\gamma-\alpha=\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)(\beta-\alpha)$ より

$$\gamma=\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)\{(3+5i)-(1+i)\}+(1+i)$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(2+4i)+(1+i)$$

$$=-\sqrt{3}-2\sqrt{3}\,i+i-2+1+i=(-1-\sqrt{3})+(2-2\sqrt{3})i$$

(2)　点 γ は点 β を，点 α を中心に $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ 回転した点であるから

$$\gamma-\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\beta-\alpha)\quad\cdots\cdots①$$

または $\gamma-\alpha=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(\beta-\alpha)\quad\cdots\cdots②$

$\beta-\alpha=(4+3i)-(-2+i)=6+2i$ より

①のとき　$\gamma=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(6+2i)+(-2+i)=(1-\sqrt{3})+(2+3\sqrt{3})i$

②のとき　$\gamma=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(6+2i)+(-2+i)=(1+\sqrt{3})+(2-3\sqrt{3})i$

よって $\gamma=(1-\sqrt{3})+(2+3\sqrt{3})i$，$(1+\sqrt{3})+(2-3\sqrt{3})i$

第 8 講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：③，イ：④

[解説]

点 β を，点 α を中心に $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転した点が

γ だから，

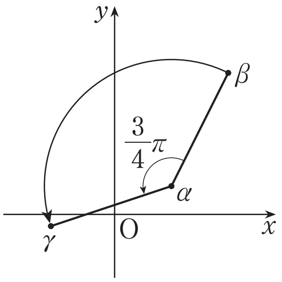
$$\boldsymbol{\gamma-\alpha=\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)(\beta-\alpha)}$$ [A]

$$\gamma=\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\{(4+5i)-(2+i)\}+(2+i)$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(2+4i)+(2+i)$$

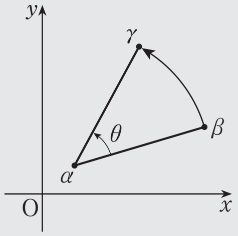
$$=-\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,i+\sqrt{2}\,i-2\sqrt{2}+2+i$$

$$=\boldsymbol{(2-3\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})i}$$



[A]　点 β を，点 α を中心に θ だけ回転した点を γ とすると，

$$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$$

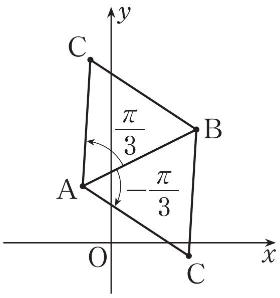


2

[正解] ウ：②，エ：④

[解説]

点 γ は，点 β を，点 α を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ または $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。



[B]

[B]　点 γ は2通りあることに注意する。

すなわち，

$$\gamma-\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\beta-\alpha)\quad\cdots\cdots①$$

[C]

[C]　点 β を，点 α を中心に θ だけ回転した点を γ とすると，
$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$

または，

$$\gamma-\alpha=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(\beta-\alpha)$$

$$\cdots\cdots②$$

ここで，$\beta-\alpha=(3+4i)-(-1+2i)=4+2i$

①のとき，

$$\gamma=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4+2i)+(-1+2i)$$
$$=2+i+2\sqrt{3}\,i-\sqrt{3}-1+2i$$
$$=(1-\sqrt{3})+(3+2\sqrt{3})i$$

②のとき，

$$\gamma=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4+2i)+(-1+2i)$$
$$=2+i-2\sqrt{3}\,i+\sqrt{3}-1+2i$$
$$=(1+\sqrt{3})+(3-2\sqrt{3})i$$

以上により，

$$\boldsymbol{\gamma=(1-\sqrt{3})+(3+2\sqrt{3})i,}$$
$$\boldsymbol{(1+\sqrt{3})+(3-2\sqrt{3})i}$$